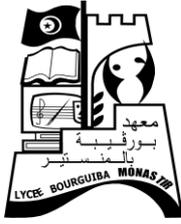


2010 / 2011



MATHEMATIQUES
DEVOIR DE SYNTHESE N°1

Date : 08 / 12 / 2010

Durée : 2 H

4 SC₂₊₃

EXERCICE N°1

Répondre par Vrai ou faux à chacune des propositions suivantes. Aucune justification n'est demandée.

- 1°) L'équation $z^2 = -5$ n'admet aucune solution dans \mathbb{C} .
- 2°) Soit f une fonction dérivable sur $[-1, 2]$ telle que $f(-1) = 2$; $f(2) = -1$.
Alors l'équation $f'(x) = -1$ admet au moins une solution dans $[-1, 2]$.
- 3°) La suite (U_n) définie sur \mathbb{N}^* par : $U_n = (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ n'admet pas de limite.
- 4°) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(4x) - 1}{x^2} = 8$.

EXERCICE N°2

- 1°) a / Résoudre dans \mathbb{C} : $z^2 + (1 - i)z - i = 0$
b / Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E) : $z^2 + (1 - i)e^{i\alpha}z - ie^{i2\alpha} = 0$; $\alpha \in \mathbb{R}$.
- 2°) Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $e^{i\alpha}$, $i e^{i\alpha}$ et $-e^{i\alpha}$.
a / Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, ABC est un triangle rectangle et isocèle en B.
b / Déterminer l'affixe du point D pour que ABCD soit un carré.
- 3°) a / Donner l'écriture exponentielle de $i e^{i\alpha}$ et $-e^{i\alpha}$.
b / Déterminer les solutions de l'équation :
(E') $z^6 + (1 - i) e^{i\frac{\pi}{12}} z^3 + \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$.

EXERCICE N°3

- 1°) On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}} - 1$.
- a / Dresser le tableau de variation de g .
b / En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$; $g(x) < 0$.
- 2°) a / Montrer que g réalise une bijection de \mathbb{R} sur un intervalle J que l'on précisera.
b / Déterminer le domaine de continuité de g^{-1} et expliciter $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.
c / Montrer que g^{-1} est dérivable sur $] -2, 0 [$ et calculer $(g^{-1})'(-\frac{1}{2})$.
- 3°) Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{1}{2} (\sqrt{x^2 + 3} - x + 1)$.
- a / Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$.
- b / Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} et que $f'(x) = \frac{1}{2} g(x)$.
- c / Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$; $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.



4°) Soit la suite (U_n) définie par :
$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = f(U_n); \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

a / Montrer que $U_n \geq 0$; pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b / En utilisant le théorème des inégalités des accroissements finis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

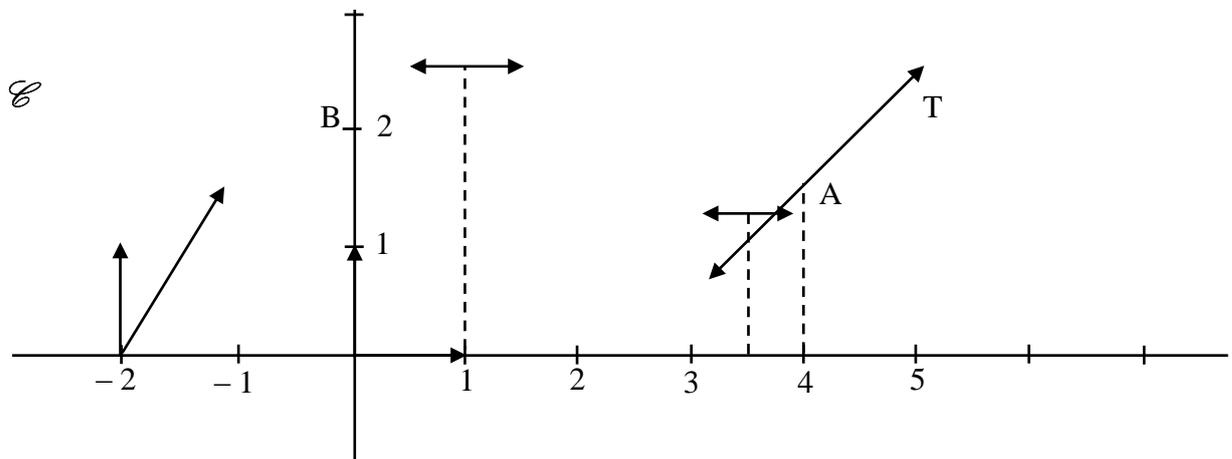
$$|U_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{2} |U_n - 1|$$

c / Dédurre que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $|U_n - 1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et trouver $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

EXERCICE N°4

La courbe \mathcal{C} ci-dessous est celle d'une fonction f définie sur \mathbb{R} .

\mathcal{C} admet une tangente T en A , deux tangentes horizontales aux points d'abscisses 1 et $\frac{7}{2}$ et deux demi tangentes au point d'abscisse -2



1°) a / Calculer $f'(1)$; $f'\left(\frac{7}{2}\right)$; $f'(4)$ et $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2}$.

b / Donner une équation de la tangente T .

c / Justifier que A est un point d'inflexion de \mathcal{C}

d / Justifier que \mathcal{C} admet une tangente parallèle à (AB) .

2°) Donner le tableau de variation de f .

3°) Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $g = \sqrt{f}$.

Donner le tableau de variation de g .

